Continuación Números Naturales:

- **Múltiplos y divisores de un número natural.**
- **Reglas de divisibilidad.**
- **Mínimo común múltiplo y Máximo común divisor.**
- **Ejercicios de aplicación.**

Continuación Números Naturales:

Múltiplos: Si n Î IN ; múltiplo de un número "n" es todo número natural que *contiene* a "n" un número entero de veces.

Ejemplos:

a) 15 si es múltiplo de 5 ; 15 si contiene a 5 tres veces.

b) 20 no es múltiplo de 7 ; 20 no contiene a 7 un número entero de veces.

El conjunto de todos los múltiplos de un número "n" se denota por M(n); teniéndose que:

$$M(n) = \{n \times 1,\ n \times 2,\ n \times 3,\ n \times 4,\ n \times 5,\ n \times 6, \ldots\ldots\ldots\}$$

Ejemplos:

a) El conjunto de todos los múltiplos de 2 es:

$$M(2) = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,\ldots\}$$

b) El conjunto de todos los múltiplos de 15 es:

$$M(15) = \{15,30,45,60,75,90,105,120,135,\ldots\}$$

Notar que todo número es múltiplo de si mismo y que todo número posee infinitos múltiplos.

Ejercicios:

1) Indique los elementos de los siguientes conjuntos y luego determine:

M(6) ={6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78,84,90,..}

M(9) = {9,18,27,36,45,54,63,72,81,90,99,108,........ }

M(12) ={12,24,36,48,60,72,84,96,........ }

M(36) ={ 36,72,108,............. }

Luego: M(6) È M(12) = M(6)

{ 6,12,18,24,30,36,48,54,60,....}

M(9) Ç M(36) = M(36)

{36,72,108,.............}

2) Completar con Î o Ï según corresponda en:

a) 6 Î ______ M(6)

b) 9 Î ______ M(3)

c) 12 Ï ______ M(8)

d) 20 Î ______ M(20)

e) 36 Ï ______ M(24)

f) 20 Ï ______ M(40)

g) 31 Ï ______ M(3)

h) 47 Ï ______ M(17)

i) 26 Î ______ M(2)

j) 49 Î ______ M(7)

k) 30 Ï ______ M(4)

l) 28 Î ______ M(4)

m) 29 Ï ______ M(3)

n) 72 Î ______ M(8)

ñ) 102 Î ______ M(3)

Divisores: Si n Î IN ; divisor de un número “n” es todo número natural que ***está contenido*** en “n” un número entero de veces.

Ejemplos:

a) 5 si es divisor de 15 ; 5 si está contenido en 15 tres veces.

b) 7 no es divisor de 20 ; 7 no está contenido en 20 un número entero de veces.

El conjunto de todos los divisores de un número “n” se denota por D(n); teniéndose que:

Ejemplos:

a) El conjunto de todos los divisores de 12 es:

D(12) = { 1,2,3,4,6,12 }

b) El conjunto de todos los divisores de 64 es:

D(64) ={ 1,2,4,8,16,32,64 }

Notar que el 1 es divisor de todo número como también que todo número es divisor de si mismo.

<u>Ejercicios</u>:

1) Indique los elementos de los siguientes conjunto y luego determine:

D(8) = { 1,2,4,8 }

D(18) = { 1,2,3,6,9,18 }

D(24) = { 1,2,3,4,6,8,12,24 }

D(36) = { 1,2,3,4,6,9,12,18,36 }

Luego: D(8) È D(24) = D(24)

{ 1,2,3,4,6,8,12,24 }

D(18) Ç D(36) = D(18)

{ 1,2,3,6,9,18 }

2) Indicar si es verdadera **(V)** o falsa **(F)** cada una de las siguientes afirmaciones:

a) 20 Î D(40) V

b) 7 Î D(7) V

c) 2 Î D(21) F

d) 4 Î D(24) V

e) 5 Î D(15) V

f) 6 Ï D(30) F

g) 12 Î D(36) V

h) 18 Î D(48) F

i) 26 Î D(52) V

j) 9 Ï D(45) F

k) 12 Î D(180) V

l) 25 Ï D(620) V

m) 30 Ï D(145) V

n) 45 Î D(450) V

ñ) 33 Î D(333) F

Algunas Reglas de divisibilidad:

Divisibilidad significa división exacta , es decir resto cero.

Ejemplo:

72 es divisible por 8 ya que 72 : 8 = 9 ; siendo exacta esta división.

Un número es divisible por:

a) 2 ; cuando es par

b) 3 ; cuando la suma de sus cifras se puede dividir exactamente por 3.

c) 4 ; cuando sus dos últimas cifras son cero o bien si forman un número que se puede dividir exactamente por 4.

d) 5 ; cuando sus última cifra es 0 o 5.

e) 6 ; cuando es divisible por 2 y 3 a la vez.

f) 8 ; cuando sus tres últimas cifras son ceros o bien forman un número que se puede dividir exactamente por 8.

g) 9 ; cuando la suma de sus cifras se puede dividir exactamente por 9.

h) 10 ; cuando su última cifra es 0.

Ejercicio:

1) Indique por que número son divisibles las cantidades:

(a) 540 : 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 9 , 10

(b) 5.184 : 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 9

(c) 9.576 : 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9

2) En el número 74☐ ; indique que cifra(s) pueden ir en el cuadro; para que el número sea divisible por:

(a) 2 ; en ☐ puede ir: 0 , 2 , 4 , 6 , 8

(b) 3 ; en ☐ puede ir: 1 , 4 , 7

(c) 4 ; en ☐ puede ir: 0 , 4 , 8

(d) 5 ; en ☐ puede ir: 0 , 5

(e) 6 ; en ☐ puede ir: 4

(f) 7; en ☐ puede ir: 2 , 9

(g) 8; en ☐ puede ir: 4

(h) 9; en ☐ puede ir: 7

(i) 10; en ☐ puede ir: 0

Mínimo común múltiplo (M.C.M.):

El M.C.M. de dos o más cantidades es el menor número que contiene exactamente a cada una de ellas.

Ejemplo:

El M.C.M. de 4 , 6 y 9 es 36; ya que 36 es el menor número que contiene exactamente a cada una de estas cantidades.

Método para obtener el M.C.M.:

Mediante tabla de factores primos: **dividir las cantidades dadas sucesivamente por números primos, hasta que todos los restos sean 1; luego el M.C.M. Queda determinado por el producto de los factores primos.**

El M.C.M. de :

i)

12	18	21	**252**
6	9	21	2
3	9	21	2
1	3	7	3
1	1	7	3
1	1	1	7

M.C.M. = 2 · 2 · 3 · 3 · 7

= 252

ii)

14	24	27	**1.512**
7	12	27	2
7	6	27	2
7	3	27	2
7	1	9	3
7	1	3	3
7	1	1	3
1	1	1	7

M.C.M. = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 3 · 7

= 1.512

Máximo común divisor (M.C.D.):

El M.C.D. de dos o más cantidades, es el mayor número que divide exactamente a cada una de ellas.

Ejemplo:

El M.C.D. para 24 , 56 y 72 es 8 ; ya que 8 es el mayor número que divide exactamente a cada una de estas cantidades.

Método para obtener el M.C.D.:

Empleando divisores: **Debemos fijarnos en la menor de las cantidades dadas:**

i) Si esta menor cantidad, divide a las restantes, ésta será el M.C.D.

ii) Si esta menor cantidad no divide a las restantes, el M.C.D, será el mayor divisor de la cantidad menor, que sí divida a las cantidades restantes.

i) El M.C.D. para 9, 18, 27 y 45 es:

La cantidad menor es 9 ; la que divide a 18, 27 y 45; luego el M.C.D. es 9.

(por (i); menor cantidad que divide a las restantes)

ii) El M.C.D. para 24 , 28 , 32 y 36 es:

La cantidad menor es 24, la que no divide a las restantes; luego:

$$D_{(24)} = \{ 1 , 2 , 3 , \boxed{4} , 6 , 8 , 12 , 24 \}$$

El mayor divisor de esta cantidad menor 24 que divide a las cantidades restantes; 28 , 32 y 36 es 4 , luego el M.C.D. de 24 , 28 , 32 y 36 es 4.

Descomponiendo en factores primos:

El M.C.D. y el M.C.M. de dos o más números se puede calcular simultáneamente descomponiendo cada número en un producto de sus factores primos, utilizando las potencias, quedando estos procedimientos definidos por:

a) El M.C.M. de dos o más cantidades queda determinado por el producto de los factores primos comunes, elevados al mayor exponente con que se encuentren, por los factores primos no comunes.

b) El M.C.D. de dos o más cantidades queda determinado por el producto de los factores primos comunes a todos los números, elevados al menor exponente con que se encuentren.

Ejemplo:

Para las cantidades 36 , 48 y 120 se tiene que:

36 = $2^2 \cdot 3^2$

48 = $2^4 \cdot 3$

120 = $2^3 \cdot 3 \cdot 5$

M.C.M. = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ **= 16·9·5 =** $\boxed{\mathbf{720}}$

M.C.D. = $2^2 \cdot 3$ **= 4·3 =** $\boxed{\mathbf{12}}$

1) Determine por factores primos el M.C.D. y el M.C.M. para las cantidades:

a) 60 , 72 y 108 donde:

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

M.C.M. $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = \boxed{1.080}$

M.C.D. $= 2^2 \cdot 3 = \boxed{12}$

b) 40 , 54 , 72 y 144 donde:

$40 = 2^3 \cdot 5$

$54 = 2 \cdot 3^3$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$144 = 2^4 \cdot 3^2$

M.C.M. $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 = \boxed{2.160}$

M.C.D. $= \boxed{2}$

2) ¿Cuál es la menor cantidad de agua que se puede juntar en un estanque con un balde de 12 litros o de 18 litros o de 20 litros y cuántos viajes tendría que hacer con cada uno de estos baldes?

La menor cantidad de agua a juntar con cualquiera de estos baldes corresponde al *menor número que contenga a 12 , 18 y 20 ;* es decir *el M.C.M. de estas cantidades*.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{12} = 2^2 \cdot 3 \\ \mathbf{18} = 2 \cdot 3^2 \\ \mathbf{20} = 2^2 \cdot 5 \end{array}\right\} \textbf{M.C.M.} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$= \mathbf{4 \cdot 9 \cdot 5}$$

$$\boxed{= \textbf{180 litros}}$$

180 : 12 = 15 viajes

180 : 18 = 10 viajes

180 : 20 = 9 viajes

3) Se tienen 3 cañerías de 64 , 80 y 96 centímetros las que se quieren dividir en partes iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál ha de ser tal longitud y el número de partes iguales de cañería a obtener?

La mayor e igual longitud a cortar estas tres cañerías corresponde *al mayor número que esta contenido en 64 , 80 y 96;* es decir *el M.C.D. de estas cantidades.*

$$\left.\begin{array}{l} 64 = 2^6 \\ 80 = 2^4 \cdot 5 \\ 96 = 2^5 \cdot 3 \end{array}\right\} \text{M.C.D.} = 2^4$$

$$\boxed{= 16\text{cm}}$$

64 : 16 = 4 partes

80 : 16 = 5 partes

96 : 16 = 6 partes +

15 partes

Ejercicios Complementarios:

1) Determine si es verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Al multiplicar dos números naturales el producto resultante es múltiplo de cada uno de ellos.	**V**

Ej: 5 · 7 = 35 con 35 múltiplo de 5 y de 7

b) Al multiplicar dos divisores de un número, el producto resultante es divisor de tal número.	**F**

Ej: 6 y 8 divisores de 24 con 6 · 8 = 48 que no es divisor de 24.

2) Si A={x / x es múltiplo de 2 y 0 < x < 10} y B = {x / x es múltiplo de 3 y 0 < x < 10} entonces es verdadero que:

A) A = B (F)

B) A – B = A (F)
{2,4,8}

C) B – A = A (F)
{3,9}

D) A Ç B = {6} (V)
{6}

E) A È B = A (F)
{2,3,4,6,8,9}

A = {2,4,6,8}

B = {3,6,9}

3) Si A = {x/x es divisor de 18} y B = {x/x es divisor de 72} ; luego A Ç B = ?

A = {1,2,3,6,9,18}

B = {1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72}

A) {x/x es divisor de 3}

A Ç B = {1,2,3,6,9,18}

B) {x/x es divisor de 6}

C) {x/x es divisor de 9}

D) {x/x es divisor de 18}

E) Ninguna de las anteriores.

4) Referente al número 12P se tiene que es (son) correcta(s):

I) Si P es par es divisible por 2. (V)

II) Si P es impar es divisible por 3. (F)

III) Si P es primo tal número es primo.(F)

A) Sólo I

B) Sólo II

C) Sólo III

D) Sólo I y III

E) Todas

I) 120, 122, 124, 126, 128 son divisibles por 2.

II) 5 es impar y 125 no es divisible. por 3.

III) 2 es primo y 122 no es primo.

Nota: Para que una condición sea verdadera; esta se debe cumplir siempre.

5) Si "p" es el M.C.M. de 18 , 24 , 36 y "q" es el M.C.M. de 16 , 24 , 32. ¿Cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) siempre verdadera(s)?

I) $p > q$ (F) II) $p = q$ (F) III) $p < q$ (V)

A) Sólo I

B) Sólo II

C) Sólo III

D) Todas

E) Ninguna

$$\left.\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array}\right\} \text{M.C.M.} = 2^3 \cdot 3^2$$

$$p = 8 \cdot 9$$

$$\boxed{p = 72}$$

$$\left.\begin{array}{l} 16 = 2^4 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 32 = 2^5 \end{array}\right\} \text{M.C.M.} = 2^5 \cdot 3$$

$$q = 32 \cdot 3$$

$$\boxed{q = 96}$$

6) Si "p" es el M.C.D. de 24 , 48 , 60 y "q" es el M.C.D. de 36 , 54 , 72 y "r" es el M.C.D. de 30 , 42 , 54 ; entonces es correcto que:

$$\left.\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 48 = 2^4 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \text{M.C.D.} = 2^2 \cdot 3$$

p = 4 · 3

$\boxed{p = 12}$

$$\left.\begin{array}{l} 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 54 = 2 \cdot 3^3 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array}\right\} \text{M.C.D.} = 2 \cdot 3^2$$

q = 2 ·9

$\boxed{q = 18}$

$$\left.\begin{array}{l} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 54 = 2 \cdot 3^3 \end{array}\right\} \text{M.C.D.} = 2 \cdot 3$$

$\boxed{r = 6}$

A) p – r = q (F)

12 - 6 = 6

B) p – q = r (F)

12 - 18 =-6

$\boxed{\textbf{C) q – p = r}}$ **(V)**

18 - 12 = 6

D) r – p = q (F)

6 - 12 = -6

E) r – q = p (F)

6 - 18 =-12

7) Referente a los números 7^{36} ; 7^{43} y 7^{59} ; de las siguientes proposiciones es (son) verdadera(s):

l) Su M.C.M. es 7^{59}. (V)

ll) Su M.C.D. es 7^{36}. (V)

lll) Es divisible por 7^{43} cada uno. (F)

7^{43} no divide a 7^{36}.

A) Sólo l y ll

B) Sólo l y lll

C) Sólo ll y lll

D) Todas

E) Ninguna

8) Se tiene que "a" es divisor de "c" si y sólo si:

(1) "a" es divisor de "b" ✘

(2) "b" es divisor de "c" ✘

✓

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por si sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional.

9) Al tener los números 6 y M ; se puede obtener el único valor de M sabiendo que:

(1) El M.C.M. de ambos números es 18.

Þ M = 9 o M = 18

(2) El M.C.D. de ambos números es 3.

Þ M = 3 o M = 9

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por si sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional.

Respuestas de Ejercicios Propuestos Clase-02

1)(a)M(8)={8,16,24,32,40,48,56,64,72,...}

(b)M(12)={12,24,36,48,60,72,....}

(c)M(24)={24,48,72,....}

(d) M(12) (e) M(24) (f) Æ

2)(a) D(18)={1,2,3,6,9,18}

(b) D(24)={1,2,3,4,6,8,12,24}

(c) D(36)={1,2,3,4,6,9,12,18,36}

(d) D(36) (e) D(18) (f) {4,8,12,24}

3) E	7) E	11) A	15) a) V
4) C	8) E	12) D	b) V
5) D	9) C	13) C	c) V
6) A	10) C	14) D	d) V