Continuación Números Naturales:

Múltiplos: Si $n \in IN$; **múltiplo** de un número "n" es todo número natural que **contiene** a "n" un número entero de veces.

> Ejemplos:
> a) 15 **si** es múltiplo de 5 ; 15 **si** contiene a 5 tres veces.
> b) 20 **no** es múltiplo de 7 ; 20 **no** contiene a 7 un número entero de veces.

El conjunto de todos los múltiplos de un número "n" se denota por M(n); teniéndose que:

$$M(n) = \{n\cdot 1,\ n\cdot 2,\ n\cdot 3,\ n\cdot 4,\ n\cdot 5,\ n\cdot 6, \ldots\ldots\ldots\}$$

> Ejemplos:
> a) El conjunto de todos los múltiplos de 2 es:
> M(2) = {
> b) El conjunto de todos los múltiplos de 15 es:
> M(15) = {

Notar que todo número es múltiplo de si mismo y que todo número posee infinitos múltiplos.

Ejercicios:

1) Indique los elementos de los siguientes conjunto y luego determine:

M(6) = {	M(9) = {
M(12) = {	M(36) = {
Luego: $M(6) \cup M(12) =$	$M(9) \cap M(36) =$

2) Completar con $\in$ o $\notin$ según corresponda en:

a) 6 _____ M(6)	f) 20 _____ M(40)	k) 30 _____ M(4)
b) 9 _____ M(3)	g) 31 _____ M(3)	l) 28 _____ M(4)
c) 12 _____ M(8)	h) 47 _____ M(17)	m) 29 _____ M(3)
d) 20 _____ M(20)	i) 26 _____ M(2)	n) 72 _____ M(8)
e) 36 _____ M(24)	j) 49 _____ M(7)	ñ) 102 _____ M(3)

Divisores: Si $n \in IN$; **divisor** de un número "n" es todo número natural que **está contenido** en "n" un número entero de veces.

> Ejemplos:
> a) 5 **si** es divisor de 15 ; 5 **si** está contenido en 15 tres veces.
> b) 7 **no** es divisor de 20 ; 7 **no** está contenido en 20 un número entero de veces.

El conjunto de todos los divisores de un número "n" se denota por D(n); teniéndose que:

Ejemplos:

a) El conjunto de todos los divisores de 12 es:

D(12) = {

b) El conjunto de todos los divisores de 64 es:

D(64) = {

Notar que el 1 es divisor de todo número como también que todo número es divisor de si mismo.

Ejercicios:

1) Indique los elementos de los siguientes conjunto y luego determine:

D(8) = { D(18) = {

D(24) = { D(36) = {

Luego: $D(8) \cup D(24) =$ $D(18) \cap D(36) =$

2) Indicar si es verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $20 \in D(40)$ _____	f) $6 \notin D(30)$ _____	k) $12 \in D(180)$ _____
b) $7 \in D(7)$ _____	g) $12 \in D(36)$ _____	l) $25 \notin D(620)$ _____
c) $2 \in D(21)$ _____	h) $18 \in D(48)$ _____	m) $30 \notin D(145)$ _____
d) $4 \in D(24)$ _____	i) $26 \in D(52)$ _____	n) $45 \in D(450)$ _____
e) $5 \in D(15)$ _____	j) $9 \notin D(45)$ _____	ñ) $33 \in D(333)$ _____

Algunas Reglas de divisibilidad:

Divisibilidad significa división exacta , es decir resto cero.

Ejemplo:

72 es divisible por 8 ya que 72 : 8 = 9 ; siendo exacta esta división.

Un número es divisible por:

a) 2 ; cuando es par
b) 3 ; cuando la suma de sus cifras se puede dividir exactamente por 3.
c) 4 ; cuando sus dos últimas cifras son cero o bien si forman un número que se puede dividir exactamente por 4.
d) 5 ; cuando sus última cifra es 0 o 5.
e) 6 ; cuando es divisible por 2 y 3 a la vez.
f) 8 ; cuando sus tres últimas cifras son ceros o bien forman un número que se puede dividir exactamente por 8.
g) 9 ; cuando la suma de sus cifras se puede dividir exactamente por 9.
h) 10 ; cuando su última cifra es 0.

Ejercicios:

1) Indique por que número son divisibles las cantidades:

(a) 540 :

(b) 5.184 :

(c) 9.576 :

2) En el número 74☐; indique que cifra(s) pueden ir en el cuadro; para que el número sea divisible por:

(a) 2 ; en ☐ puede ir:

(b) 3 ; en ☐ puede ir:

(c) 4 ; en ☐ puede ir:

(d) 5 ; en ☐ puede ir:

(e) 6 ; en ☐ puede ir:

(f) 7 ; en ☐ puede ir:

(g) 8 ; en ☐ puede ir:

(h) 9 ; en ☐ puede ir:

(i) 10 ; en ☐ puede ir:

Mínimo común múltiplo (M.C.M.):

El M.C.M. de dos o más cantidades es el menor número que contiene exactamente a cada una de ellas.

Ejemplo:

El M.C.M. de 4 , 6 y 9 es 36; ya que 36 es el menor número que contiene exactamente a cada una de estas cantidades.

Método para obtener el M.C.M.:

Mediante tabla de factores primos: dividir las cantidades dadas sucesivamente por números primos, hasta que todos los restos sean 1 ; luego el M.C.M. queda determinado por el producto de todos los factores primos.

Ejemplo:

i) El M.C.M. de 12 , 18 y 21 es:

12	18	21	

ii) El M.C.M. de 14 , 24 y 27 es:

14	24	27	

Máximo común divisor (M.C.D.):

El M.C.D. de dos o más cantidades, es el mayor número que divide exactamente a cada una de ellas.

Ejemplo: El M.C.D. para 24 , 56 y 72 es 8 ; ya que 8 es el mayor número que divide exactamente a cada una de estas cantidades.

Método para obtener el M.C.D.:

Empleando divisores: Debemos fijarnos en la menor de las cantidades dadas:

i) Si esta menor cantidad, divide a las restantes, ésta será el M.C.D.

ii) Si esta menor cantidad no divide a las restantes, el M.C.D, será el mayor divisor de la cantidad menor, que sí divida a las cantidades restantes.

Ejemplo:

i) El M.C.D. para 9, 18, 27 y 45 es:	ii) El M.C.D. para 24 , 28 , 32 y 36 es:

Descomponiendo en factores primos:

El M.C.D. y el M.C.M. de dos o más números se puede calcular simultáneamente descomponiendo cada número en un producto de sus factores primos, utilizando las potencias, quedando estos procedimientos definidos por:

a) El **M.C.M.** de dos o más cantidades queda determinado por el **producto de los factores primos comunes, elevados al mayor exponente con que se encuentren, por los factores primos no comunes.**

b) El **M.C.D.** de dos o más cantidades queda determinado por el **producto de los factores primos comunes a todos los números, elevados al menor exponente con que se encuentren.**

Ejemplo:

Para las cantidades 36 , 48 y 120 se tiene que:

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$48 = 2^4 \cdot 3$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

M.C.D. =

M.C.M. =

Ejercicios:

1) Determine por factores primos el M.C.D. y el M.C.M. para las cantidades:	
a) 60 , 72 y 108 donde:	b) 40 , 54 , 72 y 144 donde:
60 =	40 =
72 =	54 =
108 =	72 =
	144 =
M.C.M. =	M.C.M. =
M.C.D. =	M.C.D. =

2) ¿Cuál es la menor cantidad de agua que se puede juntar en un estanque con un balde de 12 litros o de 18 litros o de 20 litros y cuántos viajes tendría que hacer con cada uno de estos baldes?

3) Se tienen 3 cañerías de 64 , 80 y 96 centímetros las que se quieren dividir en partes iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál ha de ser tal longitud y el número de partes iguales de cañería a obtener?

Ejercicios Complementarios:

1) Determine si es verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Al multiplicar dos números naturales el producto resultante es múltiplo de cada uno de ellos.	
b) Al multiplicar dos divisores de un número, el producto resultante es divisor de tal número.	

2) Si $A=\{x/x$ es múltiplo de 2 y $0 < x < 10\}$ y $B = \{x/x$ es múltiplo de 3 y $0 < x < 10\}$ entonces es verdadero que:

A) $A = B$
B) $A - B = A$
C) $B - A = A$
D) $A \cap B = \{6\}$
E) $A \cup B = A$

3) Si $A = \{x/x$ es divisor de $18\}$ y $B = \{x/x$ es divisor de $72\}$; luego $A \cap B =$?

A) $\{x/x$ es divisor de $3\}$
B) $\{x/x$ es divisor de $6\}$
C) $\{x/x$ es divisor de $9\}$
D) $\{x/x$ es divisor de $18\}$
E) Ninguna de las anteriores.

4) Referente al número 12P se tiene que es (son) correcta(s):

l) Si P es par es divisible por 2.
ll) Si P es impar es divisible por 3.
lll) Si P es primo tal número es primo.

A) Sólo l
B) Sólo ll
C) Sólo lll
D) Sólo l y lll
E) Todas

5) Si "p" es el M.C.M. de 18 , 24 , 36 y "q" es el M.C.M. de 16 , 24 , 32. ¿Cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) siempre verdadera(s)?

l) $p > q$ ll) $p = q$ lll) $p < q$

A) Sólo l
B) Sólo ll
C) Sólo lll
D) Todas
E) Ninguna

6) Si "p" es el M.C.D. de 24 , 48 , 60 y "q" es el M.C.D. de 36 , 54 , 72 y "r" es el M.C.D. de 30 , 42 , 54 ; entonces es correcto que:

A) $p - r = q$
B) $p - q = r$
C) $q - p = r$
D) $r - p = q$
E) $r - q = p$

7) Referente a los números 7^{36} ; 7^{43} y 7^{59} ; de las siguientes proposiciones es (son) verdadera(s):

l) Su M.C.M. es 7^{59}.
ll) Su M.C.D. es 7^{36}.
lll) Es divisible por 7^{43} cada uno.

A) Sólo l y ll
B) Sólo l y lll
C) Sólo ll y lll
D) Todas
E) Ninguna

8) Se tiene que "a" es divisor de "c" si y sólo si:

(1) "a" es divisor de "b"
(2) "b" es divisor de "c"

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por si sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional.

9) Al tener los números 6 y M ; se puede obtener el único valor de M sabiendo que:

(1) El M.C.M. de ambos números es 18.
(2) El M.C.D. de ambos números es 3.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por si sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional.

Ejercicios Propuestos:

1) Indique los elementos de los conjuntos de múltiplos y luego responder:

a) M(8) = {

b) M(12) = {

c) M(24) = {

d) $M(12) \cup M(24) =$

e) $M(8) \cap M(24) =$

f) $M(24) - M(12) =$

2) Indique los elementos de los conjuntos de divisores y luego responder:

a) D(18) = {

b) D(24) = {

c) D(36) = {

d) $D(18) \cup D(36) =$

e) $D18) \cap D(36) =$

f) $D(24) - D(18) =$

3) Si M = {x/x es divisor de 15} y N = {x/x es múltiplo de 3}; luego:

A) $M \cup N$ = {x/x es divisor de 15}

B) $M \cap N$ = {x/x es divisor de 6}

C) $M \cup N$ = {x/x es divisor de 36}

D) $M \cap N = \{3,6,12\}$

E) $M - N = \{1,5\}$

4) Si en IN; $p = m \cdot n$; es falso que:

A) p es múltiplo de n

B) p es divisible por m

C) p es divisor de n

D) n es divisor de p

E) p es divisor de $m \cdot n$

5) Si P es cifra del número 3P2. Cuál(es) de la(s) proposiciones es(son) verdadera(s):

l) Para cualquier valor de P tal número es divisible por 2.

ll) Si P es impar, tal número es siempre divisible por 4.

lll) Si P es par, tal número es siempre divisible por 3.

A) Sólo l

B) Sólo ll

C) Sólo lll

D) Sólo l y ll

E) Todas

6) Un número se dice perfecto si este es igual a la suma de sus divisores exceptuando él mismo número. De los siguientes números es (son) perfecto(s):

l) 28 ll) 36 lll) 48

A) Sólo l

B) Sólo l y ll

C) Sólo l y lll

D) Sólo ll y lll

E) Todos

7) De los siguientes números es primo:

A) 1235

B) 1521

C) 3521

D) 3153

E) 4127

8) El M.C.M. entre 12, 18, 27 y 32 es:

A) 2

B) 54

C) 148

D) 216

E) 864

9) El M.C.D. de 36, 54 y 90 es:

A) 6

B) 9

C) 18

D) 36

E) 54

10) Si “p” es el M.C.M. y “q” es el M.C.D. entre 12, 18 y 24; es verdadero que:

A) $q = 6p$

B) $p = 6q$

C) $p = 12q$

D) $q = 12p$

E) Ninguna de las anteriores.

11) Tres aviones salen de una misma ciudad, el 1º cada 8 días, el 2º cada 10 días y el 3º cada 20 días. Si salen juntos de ese aeropuerto el día 2 de Enero. ¿Cuál será la fecha más próxima en que volverán a salir juntos? A) 11 de Febrero B) 11 de Marzo C) 23 de Febrero D) 23 de Marzo E) Otra fecha.	12) Se tienen 3 sacos de arroz los que pesan 56, 72 y 80 Kg; los que se quieren envasar en bolsas de igual y de la mayor capacidad posible. De las siguientes proposiciones es (son) verdadera(s): l) Cada bolsa pesará 8 Kg. ll) Se obtendrán 26 bolsas en total. lll) Se envasará un total de 208 Kg. A) Sólo l y ll B) Sólo l y lll C) Sólo ll y lll D) Todas E) Ninguna.

13) Para los números "p" y "q" sean iguales se debe cumplir que: (1) p sea múltiplo de q. (2) p sea divisor de q. A) (1) por sí sola B) (2) por sí sola C) Ambas juntas; (1) y (2) D) Cada una por si sola, (1) ó (2) E) Se requiere información adicional	14) Si A = {2,3,5} ; B = {4,6,9} ; luego se tiene que 2 está relacionado con 6 si y sólo si para todo $x \in A$, $y \in B$ se define la relación: (1) x es divisor de y. (2) x es menor que y. A) (1) por sí sola B) (2) por sí sola C) Ambas juntas, (1) y (2) D) Cada una por sí sola, (1) ó (2) E) Se requiere información adicional.

15) Determine verdadero o falso para:

(a) El M.C.M. de dos números es múltiplo del M.C.D. de estos.	
(b) El M.C.D. de dos números es divisor del M.C.M. de estos.	
(c) El M.C.M. de dos números consecutivos es producto de esos números.	
(d) Siempre el M.C.M. de dos números pares consecutivos es igual al producto de esos números dividido por 2.	

Respuestas Ejercicios Propuestos Clase-01

1) D	2) E	3) C	4) B	5) A	6) D
7) D	8) B	9) D	10) C	11) A	12) C